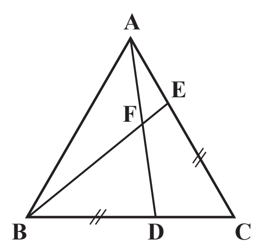
پنج روش با تبدیل‌های هندسی برای حل یک مسئله!

مهرداد محدث
دبیر ریاضی شهر تهران

یکی از مسائل معروف که به کمک ویژگی‌های دوران حل می‌شود، آخرین تمرینِ کتاب درسی **هندسهٔ (۲) در فصل سوم کتاب** است که بارها سؤالِ امتحان نهایی نیز بوده است. مسئله به این شکل طرح می‌شود:

مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و BD=CE. ثابت کنید: AD=BE و $B\hat{F}D=۶۰^\circ$ (BD را مساوی CE جدا کرده‌ایم).

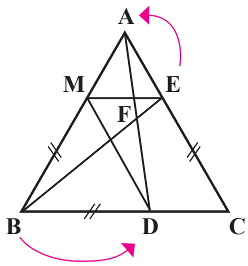


در اینجا پنج روش متفاوت برای حلِ این مسئله ارائه می‌شود که همگی از دوران و ویژگی‌های آن به نوعی استفاده می‌کنند. این مسئله گویای اصل بسیار مهم تعدد روش‌های حل، برای یک مسئلهٔ ثابت با بینش‌های مختلف است (که چهار روش اول را در تصحیح اوراق امتحانات نهایی منطقهٔ ۶ دیده‌ام). روش آخر روش شخصی خودم محسوب می‌شود که در کلاس‌های درسی برای فهم بیشتر دانش‌آموزان از آن استفاده می‌کنم و به‌نظر بنده بسیار قابل فهم‌تر و ملموس‌تر است.

روش اول

BM را هم‌طول با BD روی BA و از طرف B جدا می‌کنیم.

اگر به مرکز M و به اندازهٔ $\alpha=۶۰^\circ$ به کمک دوران E را به A و B را بـه D تصویر کنیم، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} E \to A \\ B \to D \\ M \to M \ \text{مرکز دوران} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ایزومتری است}]{\text{چون دوران}} \overset{\Delta}{AMD} \cong \overset{\Delta}{EMB}$$

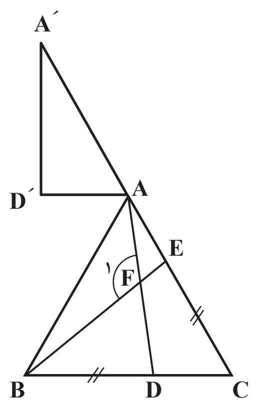
$$\to \underset{\text{تصویر پاره‌خط}}{AD} = \underset{\text{پاره‌خط}}{BE}$$

زاویهٔ بین خط و دوران یافتهٔ آن، یعنی $B\hat{F}D$ نیز مساوی ۶۰ درجه خواهد بود.

تذکر: $\overset{\Delta}{AME}$ و $\overset{\Delta}{BMD}$ نیز با توجه به رسم بیان شده متساوی‌الاضلاع خواهند بود و شرایط حل برقرار است.

روش دوم

مثلث DAC را به‌کمک بردار $\overline{CA}$ انتقال می‌دهیم تا مثلث D´A´A به‌دست آید. سپس به مرکز A و $\alpha=۱۲۰^\circ$ این مثلث را دوران می‌دهیم:



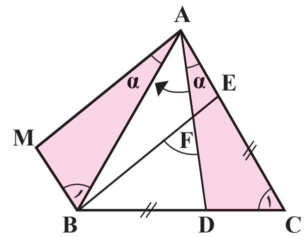
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} D' \to E \\ A' \to B \\ A \to A \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{بودن دوران}]{\text{ایزومتری}} \overset{\Delta}{AEB} \cong \overset{\Delta}{AD'A'} \\ \text{ایزومتری بودن انتقال} \to \overset{\Delta}{ADC} \cong \overset{\Delta}{AD'A'} \end{array}\right\} \overset{\Delta}{AEB} \cong \overset{\Delta}{ADC}$$

$$\text{اضلاع نظیر} \to AD = BE$$

و از آنجا $\hat{F}_1 = ۱۲۰^\circ$ $B\hat{F}D = ۶۰^\circ$ خواهد بود.

روش سوم

اگر مرکز دوران A و $\alpha=-۶۰^\circ$ را در جهت فلش در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:



$$\left.\begin{array}{l}A\to A\\ D\to M\\ C\to B\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{بودن دوران}]{\text{ایزومتری}}\overset{\Delta}{ADC}\cong\overset{\Delta}{AMB}\ (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{با توجه به فرض سؤال}\quad AE=DC\\ DC=BM\end{array}\right\}AE=BM\\ \left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{B}_۱=۶۰\\ MAEB:\text{قطر}\ AB\end{array}\right\}\to AE\parallel BM\end{array}\right\}$$

$$\text{متوازی‌الاضلاع است}\ MAEB\to\left.\begin{array}{l}AM=BE\\ AM=AD\end{array}\right\}AD=BE$$

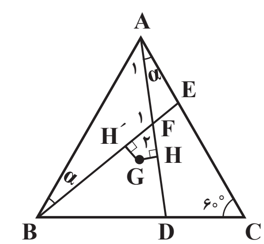
$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AMB}\ \text{در}\to\hat{M}=۱۸۰-(۶۰+\alpha)\\ \text{در متوازی‌الاضلاع}\quad \hat{M}=\hat{E}\end{array}\right\}\to\hat{E}=۱۸۰-(۶۰+\alpha)=۱۲۰-\alpha$$

$$\overset{\Delta}{AFE}\quad \hat{F}=۱۸۰-(\hat{A}+\hat{E})=۱۸۰-(\alpha+(۱۸۰-(۶۰+\alpha)))$$

$$\to\hat{F}=۶۰^\circ\xrightarrow[\text{متقابل به رأس}]{}B\hat{F}D=۶۰^\circ$$

روش چهارم

از محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (نقطهٔ G) می‌گیریم و بر AD و BE عمودهایی مطابق شکل رسم می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{F}_۱=۱۸۰-(\hat{A}_۱+\hat{\alpha}):\overset{\Delta}{ABE}\ \text{در}\\ \hat{A}_۱+\hat{\alpha}=۶۰^\circ:A\ \text{در رأس}\\ \to\hat{F}_۱=۱۸۰-۶۰=۱۲۰\to\hat{F}_۲=۶۰^\circ\end{array}\right\}\leftarrow(\text{ض‌زض}\ \overset{\Delta}{BAE}\cong\overset{\Delta}{ADC})$$

در چهارضلعی $H'FHG$ داریم: $\hat{H}=\hat{H}'=۹۰^\circ$. پس: $\hat{F}_۲+\hat{G}=۱۸۰^\circ$. در نتیجه: $\hat{G}=۱۲۰^\circ$.

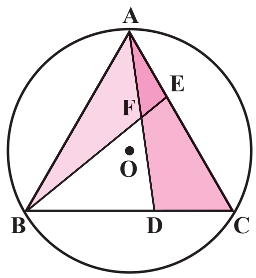
اگر به مرکز G و $\hat{\alpha}$ برابر ۱۲۰°، H را دوران دهیم و بر H' تصویر کنیم، داریم:

$AD\to BE$: دوران پاره‌خط‌ها

$AD=BE$: ایزومتری بودن

روش پنجم (روش شخصی نگارنده)

با رسم دایرهٔ محیطی $\overset{\Delta}{ABC}$ (روش‌های بیان شده در فصل اول) O را مرکز دوران در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه: $\widehat{AC}=\widehat{AB}=\widehat{BC}$، هر یک از این کمان‌ها $\frac{۳۶۰^\circ}{۳}=۱۲۰^\circ$ خواهند بود. پس $\hat{\alpha}=۱۲۰^\circ$ به‌عنوان زاویهٔ دوران نتیجه می‌دهد:



$$\left.\begin{array}{l}C\to A\\ A\to B\\ B\to C\\ D\to E\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{بودن دوران}]{\text{ایزومتری}}AD=BE$$

و $AD\to BE$ در نتیجه AD و BE با هم زاویه‌ای مساوی زاویهٔ دوران می‌سازند که مساوی ۱۲۰° است در نتیجه زاویهٔ حاده بین آن‌ها مساوی ۶۰° است: $B\hat{F}D=۶۰^\circ$

در مثلث ABC، زاویهٔ رأس A منفرجه است، میانهٔ BD با ضلع AB زاویهٔ ۳۰° می‌سازد و: $\hat{C}=۳۰^\circ$ زاویهٔ A چند درجه است؟

- الف) ۱۰۰
- ب) ۱۰۵
- ج) ۱۱۰
- د) ۱۱۵
- هـ) ۱۲۰